Ueber

# Rollbewegungen unter der Voraussetzung, dass der erzeugende Punkt noch einer besonderen Eigenbewegung unterliegt.

---

**Inaugural-Dissertation**

zur

Erlangung der Doctorwürde

der

hochlöblichen philosophischen Facultät

**der Universität Marburg**

eingereicht von

**Bernhard Biel,**
Gymnasiallehrer zu Bensheim.

Marburg.
1886.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554015_0073

Auf der durch die Gleichung:

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \qquad (1)$$

repräsentierten Curve als Grundcurve rolle eine zweite mit der Gleichung:

$$\eta = \varphi(\xi) \qquad (2)$$

beide Gleichungen bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem und den Anfangszustand der Bewegung. Es soll untersucht werden, welche Bahn ein in der Ebene beider Curven liegender Punkt beschreibt, wenn derselbe, ausser dass er sich an der Rollbewegung beteiligt, noch eine gewisse von der Rollbewegung abhängige Eigenbewegung besitzt, d. h. seine Lage zur rollenden Curve beständig ändert, während bei den Rollbewegungen gewöhnlicher Art die Lage des erzeugenden Punktes zur rollenden Curve stets dieselbe bleibt. Der Punkt wird sich dabei auf einer bestimmten, in Bezug auf die rollende Curve festliegenden Bahn bewegen, deren Gleichung entweder direkt gegeben ist oder doch aus den gegebenen Bewegungsbedingungen gefunden werden kann. Rollt z. B. ein Kreis auf irgend einer andern Linie und soll der erzeugende Punkt die Bedingung erfüllen, dass er stets in der Mitte der vom augenblicklichen zum ursprünglichen Berührungspunkt gezogenen Sehne liegt, so heisst das offenbar auch: er soll sich gleichzeitig auf einem Kreise bewegen, der den rollenden im ursprünglichen Berührungspunkt mit der Grundcurve berührt und durch dessen Mittelpunkt geht. Wenn es nun auch im gegebenen Falle nicht nötig ist, die Gleichung der Eigenbahn des Punktes, falls sie nicht direkt gegeben, erst zu entwickeln, sondern die jedesmaligen Coordinaten des erzeugenden Punktes sich direkt aus der gegebenen Bewegungsbedingung werden ermitteln lassen, so können wir doch immerhin unbeschadet der Allgemeinheit jene Eigenbahn als gegeben ansehen, was wir bei der zunächst anzustellenden allgemeinen Behandlung unserer Aufgabe um so mehr thun wollen, als im Folgenden ein spezielles Beispiel dieser Art der Betrachtung unterzogen werden

soll. — Die Curve, auf welcher der Punkt seine Eigenbewegung vollzieht und welche die Leitcurve heissen mag, habe die Gleichung:

$$\eta' = \chi(\xi') \qquad (3)$$

ebenfalls wie (1) und (2) bezogen auf den Anfangszustand der Bewegung und dasselbe rechtwinklige Coordinatensystem.

Fig. 1. In Fig. 1 sei Curve (1) die feste Grundcurve $[\mathfrak{y} = \mathfrak{f}(\mathfrak{x})]$, Curve (2) die rollende $[\eta = \varphi(\xi)]$ und Curve (3) die Leitcurve des erzeugenden Punktes $P\,[\eta' = \chi(\xi')]$. Die Abscisse des ursprünglichen Berührungspunkts $A$ sei gleich $a$, sowie die ursprüngliche Abscisse $OQ$ von $P$ gleich $b$. Nach Abwälzung des Bogens $AB$, wobei $B$ nach $B'$ gelangt sei und mithin Bogen $AB$ = Bogen $AB'$ sein muss, wird Punkt $P$ um eine gewisse der vorgeschriebenen Bewegungsbedingung entsprechende Strecke auf seiner Leitcurve fortgeschritten sein, sodass er, während seine ursprüngliche Lage nach $P'$ gelangt, sich nunmehr etwa in $P_1'$ befindet. $P_1'$ ist dann ein Punkt $[x, y]$ der gesuchten Curve, wenn $x$ und $y$ die laufenden Coordinaten derselben bedeuten, ihre gesuchte Gleichung also ist:

$$y = f(x) \qquad (4)$$

$P_1'$ gehört aber offenbar auch einer gewöhnlichen Rollcurve an, die in einem Punkte $P_1$ $(\xi', \eta')$ beginnt, für welchen Bogen $PP_1$ = Bogen $P'P_1'$ ist. Die Coordinaten $\xi'$ und $\eta'$ von $P_1$ müssen nun, da die Eigenbewegung des Punktes $P$, also auch die nach einer gewissen Abwälzung auf der Leitcurve durchlaufene Bogenlänge $PP_1$ von der Rollbewegung abhängig sein soll, gewisse entweder schon direkt bekannte oder aus den für $P$ bestehenden Bewegungsbedingungen zu ermittelnde Funktionen von $\mathfrak{x}$ sein und man gelangt somit zu der Gleichung der gesuchten Rollcurve, wenn man in der Gleichung der zu Punkt $P_1$ als ruhendem Erzeugungspunkt gehörigen Rollcurve gewöhnlicher Art schliesslich $\xi'$ und $\eta'$ als Funktionen von $\mathfrak{x}$ ausdrückt.

Jene Gleichung ergiebt sich aber bekanntlich aus folgender Betrachtung. Weil Bogen $AB$ = Bogen $AB'$, so besteht:

$$\int_a^{\xi} \sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}\, d\xi = \int_a^{\mathfrak{x}} \sqrt{1 + \left(\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}\right)^2}\, d\mathfrak{x} \qquad (5)$$

woraus $\xi$ und nach (2) auch $\eta$ als Funktionen von $\mathfrak{x}$ erhalten werden.

Ferner hat man wegen $B'P_1' = BP_1$, wenn man diese Längen durch die Coordinaten ihrer Endpunkte ausdrückt und quadriert:

$$(x - \mathfrak{x})^2 + (y - \mathfrak{y})^2 = (\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 \qquad (6)$$

wo gemäss (1) und (5) $\mathfrak{y}$, $\xi$, $\eta$ als Functionen von $\mathfrak{x}$ erscheinen, $\xi'$ und $\eta'$

aber zunächst als constante Grössen anzusehen sind. Diese Gleichung (6) stellt aber in Folge des veränderlichen Parameters $\mathfrak{x}$ eine Schaar von Kreisen dar, deren Enveloppe die gesuchte zu Punkt $[\xi', \eta']$ gehörige Rollcurve ist, und man hat somit als weitere Bedingungsgleichung:

$$(x - \mathfrak{x}) + (y - \mathfrak{y})\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \mathfrak{x}} - (\xi - \xi')\frac{\partial \xi}{\partial \mathfrak{x}} - (\eta - \eta')\frac{\partial \eta}{\partial \mathfrak{x}} = 0 \qquad (7)$$

sodass die Gleichungen (6) und (7) in ihrer Coexistenz die durch den zunächst ruhend gedachten Punkt $[\xi', \eta']$ erzeugte Rollcurve gewöhnlicher Art repräsentieren. Werden nun darin $\xi'$ und $\eta'$ als Funktionen von $\mathfrak{x}$ ausgedrückt, wie sie sich aus den für Punkt $P$ gegebenen Bewegungsbedingungen darstellen, so sind Gleichungen (6) und (7) die unserer gesuchten Curve, nämlich für Punkt $[\xi', \eta']$ als veränderlichen Erzeugungspunkt. Durch Elimination von $\mathfrak{x}$ erhält man dann schliesslich die gesuchte Gleichung (4). Es muss hiernach nur immer möglich sein, die einer bestimmten Lage des Punktes $P$ auf seiner Bahn zugehörigen Coordinaten $\xi'$, $\eta'$ durch $\mathfrak{x}$ auszudrücken, sei es nun, dass diese Bahn selbst oder ähnlich wie im oben angeführten Beispiele irgend eine andere Bedingung für seine Eigenbewegung gegeben ist, vermöge welcher diese letztere von der Rollbewegung abhängt.

Nach dieser allgemeinen Betrachtung mag jetzt folgende Aufgabe näher ins Auge gefasst werden.

Die Grundcurve sei der unterhalb der $x$-Axe liegende und dieselbe im Coordinatenanfang berührende Kreis:

$$\mathfrak{x}^2 + (\mathfrak{y} + \mathfrak{r})^2 = \mathfrak{r}^2 \qquad (8)$$

die rollende Curve gleichfalls ein Kreis, der ursprünglich oberhalb der $x$-Axe liegt und diese ebenfalls im Coordinatenanfang berührt, also mit der Gleichung:

$$\xi^2 + (\eta - \varrho)^2 = \varrho^2 \qquad (9)$$

die Leitcurve endlich eine Grade mit der ihrer ursprünglichen Lage entsprechenden Gleichung:

$$\eta' = p\,\xi' + q. \qquad (10)$$

Bedeutet nun $\sigma$ das einer bestimmten Wälzung entsprechende Bogenstück des Kreises (9) und $m$ eine beliebige Constante, so soll sich der erzeugende Punkt $P$ auf der Graden (10) derartig bewegen, dass er stets senkrecht unter dem Endpunkt $P_1$ $[\xi_1, \eta_1]$ des Bogens $m\sigma$ liegt, wobei zu bemerken ist, dass je nachdem $m$ positiv oder negativ genommen wird, Bogen $m\sigma$ vom ursprünglichen Berührungspunkt in gleichem oder entgegengesetzten Sinne wie $\sigma$ zu zählen ist. Punkt $P$ ist mithin der Schnittpunkt der von $[\xi_1, \eta_1]$ auf (10) gefällten

Senkrechten mit dieser Graden. Die Gleichung dieser Senkrechten ist, wenn man ihre laufenden Coordinaten ebenfalls mit $\xi'$, $\eta'$ bezeichnet:

$$\eta' - \eta_1 = -\frac{1}{p}(\xi' - \xi_1) \tag{11}$$

und hieraus folgt für die Coordinaten des erzeugenden Punktes $P$ als des Schnittpunktes von (10) und (11):

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \frac{p\eta_1 + \xi_1 - pq}{1+p^2} \\ \eta' &= \frac{p(p\eta_1 + \xi_1) + q}{1+p^2} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Ferner muss sein einerseits:

$$m\sigma = \int_0^{\xi_1} \sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}\, d\xi$$

anderseits:

$$m\sigma = m\int_0^{\xi} \sqrt{1 + \left(\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}\right)^2}\, d\mathfrak{x}$$

mithin:

$$\int_0^{\xi_1} \sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}\, d\xi = m\int_0^{\xi} \sqrt{1 + \left(\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}\right)^2}\, d\mathfrak{x}$$

woraus sich in Verbindung mit (9) $\xi_1$ und $\eta_1$ ergeben. Durch Entwicklung der Werte von $\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}$, $\frac{d\eta}{d\xi}$ aus (8) und (9) und Ausführung der Integration erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \varrho \sin\frac{m\mathfrak{r}}{\varrho}\varphi \\ \eta_1 &= \varrho - \varrho\cos\frac{m\mathfrak{r}}{\varrho}\varphi \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

wenn nämlich arc $\sin\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{r}} = \varphi$ gesetzt wird, wobei offenbar $\varphi$ den dem abgewälzten Bogen des Grundkreises entsprechenden Centri-Winkel bedeutet. — Ganz ähnlich folgt für $\xi$ und $\eta$ gemäss Relation (5):

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \varrho \sin\frac{\mathfrak{r}}{\varrho}\varphi \\ \eta &= \varrho - \varrho\cos\frac{\mathfrak{r}}{\varrho}\varphi \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Durch Substitution aus (13) in (12) und darauf aus (12) und (14) in (6) und (7) ergeben sich endlich die Gleichungen der gesuchten Curve. Die Einführung des Winkels $\varphi$ gestattet zunächst eine Umformung der Gleichungen (6) und (7), in Folge deren die Variabeln $x$ und $y$ jede als

Funktion von $\varphi$ allein erscheinen. Es folgt nämlich, wegen arc sin $\frac{\xi}{\mathfrak{r}} = \varphi$ und somit $\frac{\xi}{\mathfrak{r}} = \sin\varphi$, aus (1): $\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial\xi} = -\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$, ebenso aus (14):

$$\frac{\partial\xi}{\partial\xi} = \frac{\cos\frac{\mathfrak{r}}{\varrho}\varphi}{\cos\varphi}, \quad \frac{\partial\eta}{\partial\xi} = \frac{\sin\frac{\mathfrak{r}}{\varrho}\varphi}{\cos\varphi},$$

mithin, wenn man noch $\frac{\mathfrak{r}}{\varrho}\varphi = \varphi'$ setzt, für (6) und (7) resp.:

$$(x-\xi)^2 + (y-\mathfrak{y})^2 = (\xi-\xi')^2 + (\eta-\eta')^2 \qquad (15)$$

$$(x-\xi)\cos\varphi - (y-\mathfrak{y})\sin\varphi = -(\xi-\xi')\cos\varphi' - (\eta-\eta')\sin\varphi' \qquad (16)$$

woraus durch Quadrieren von (16) und Subtraktion dieser Gleichung von (15):

$$(x-\xi)\sin\varphi + (y-\mathfrak{y})\cos\varphi = (\xi-\xi')\sin\varphi' - (\eta-\eta')\cos\varphi' \qquad (17)$$

Die Combination von (16) und (17) liefert schliesslich:

$$\left.\begin{aligned} x-\xi &= -(\xi-\xi')\cos(\varphi'+\varphi) - (\eta-\eta')\sin(\varphi'+\varphi) \\ y-\mathfrak{y} &= \quad (\xi-\xi')\sin(\varphi'+\varphi) - (\eta-\eta')\cos(\varphi'+\varphi) \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

als Gleichungen unserer Curve, worin nur noch die Grössen $\xi$, $\mathfrak{y}$, $\xi$, $\eta$, $\xi'$, $\eta'$ durch ihre Werte in $\varphi$ zu ersetzen sind.

Wir wollen uns nunmehr zur Betrachtung von speziellen Fällen wenden, welche je nach der Lage der graden Leitlinie zum rollenden Kreis, nach dem Werte von $m$, sowie nach dem Grössen- und Lagenverhältnis von rollendem Grundkreis auftreten, und aus der grossen Zahl derselben die ausgezeichnetsten hervorheben.

Betreffs der Lage der Leitgraden mag im Folgenden nur der Fall Berücksichtigung finden, in welchem $p = \infty$ und $q = 0$, die Grade also mit dem durch den ursprünglichen Berührungspunkt gehenden Durchmesser des rollenden Kreises zusammenfällt. Unter dieser Voraussetzung sollen dann folgende vier Fälle (I.—IV.) näher betrachtet werden.

I. Der Grundkreis habe die durch Gleichung (10) bestimmte Lage; die Wälzung ist dann eine epicycloidische und die Gleichungen (18) gehen unter der oben gemachten Voraussetzung, indem $\xi' = 0$, $\eta' = \eta_1 = \varrho - \varrho\cos m\varphi'$ wird, über in:

$$\left.\begin{aligned} x &= (\mathfrak{r}+\varrho)\sin\varphi - \varrho\cos m\varphi'\sin(\varphi'+\varphi) \\ y &= (\mathfrak{r}+\varrho)\cos\varphi - \varrho\cos m\varphi'\cos(\varphi'+\varphi) - \mathfrak{r} \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Für $m = 0$ gehen hieraus die Gleichungen der den Kreisen $[\mathfrak{r}]$ und $[\varrho]$*) zugehörigen gewöhnlichen Epicycloide hervor, wie es auch sein muss, da unter dieser Bedingung Punkt $P$ keine Eigenbewegung besitzt.

*) Kreis $[\mathfrak{r}]$ soll die abgekürzte Bezeichnung sein für: Kreis vom Radius $\mathfrak{r}$.

Bezüglich der von Null verschiedenen Werte von $m$ erkennt man, dass für gleiche aber entgegengesetzte $m$ die Gleichungen genau dieselbe Form behalten, was auch aus der Anschauung unmittelbar klar ist, und weiterhin, dass alsdann bei gleichmässig fortschreitender Rollbewegung Punkt $P$ auf dem Durchmesser des rollenden Kreises die Pendelbewegung vollzieht, deren Geschwindigkeit von dem absoluten Werte von $m$ abhängig ist.

Für $m = \pm 1$, was bedeutet, dass Punkt $P$ stets senkrecht unter dem Berührungspunkt selbst liegt resp. senkrecht unter dem entsprechenden Punkte auf der andern Seite des Durchmessers, verwandeln sich Gleichungen (19) in:

$$x = (\mathfrak{r} + \varrho)\sin\varphi - \varrho\cos\varphi'\sin(\varphi' + \varphi)$$
$$y = (\mathfrak{r} + \varrho)\cos\varphi - \varrho\cos\varphi'\cos(\varphi' + \varphi) - \mathfrak{r}$$

oder in anderer Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} x &= (\mathfrak{r} + \tfrac{1}{2}\varrho)\sin\varphi - \tfrac{1}{2}\varrho\sin\frac{\mathfrak{r} + \frac{1}{2}\varrho}{\frac{1}{2}\varrho}\varphi \\ y &= (\mathfrak{r} + \tfrac{1}{2}\varrho)\cos\varphi - \tfrac{1}{2}\varrho\cos\frac{\mathfrak{r} + \frac{1}{2}\varrho}{\frac{1}{2}\varrho}\varphi - \mathfrak{r} \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Gleichungen, welche sofort erkennen lassen, dass die entstehende Curve eine gewöhnliche Epicycloide ist, die auch entstehen würde, wenn auf dem Grundkreis [r] ein zweiter [$\frac{1}{2}\varrho$] bei ruhendem Erzeugungspunkte rollte.

Für die einem bestimmten $\varphi$ entsprechende Lage des Durchmessers, auf welchem Punkt $P$ sich bewegt, ergiebt sich leicht, wenn man den von ihm mit der $x$-Axe gebildeten Winkel mit $\tau$ bezeichnet:

$$\tau = \frac{\pi}{2} - (\varphi' + \varphi) \text{ oder}$$
$$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{cotg}(\varphi' + \varphi)$$

Desgleichen erhält man für die Neigung $\tau'$ der Curventangente an demselben Punkt [$\varphi$] aus (20):

$$\operatorname{tg}\tau' = \operatorname{cotg}(\varphi' + \varphi)$$

woraus hervorgeht, dass jener Durchmesser stets Tangente ist an die erzeugte Curve und diese deshalb gleichbedeutend ist mit der von dem Durchmesser bei seiner Bewegung erzeugten Enveloppe. In der That gelangt man zu den Gleichungen (20), wenn man die Einhüllende des Durchmessers auf dem bekannten Wege sucht. Es besteht nämlich für den Durchmesser, wie man leicht findet, die Gleichung:

$$y\sin(\varphi' + \varphi) - x\cos(\varphi' + \varphi) = (\mathfrak{r} + \varrho)\sin\varphi' - \mathfrak{r}\sin(\varphi' + \varphi) \qquad (21)$$

Durch Differentiation nach $\varphi$ folgt daraus:

$$y\cos(\varphi'+\varphi)+x\sin(\varphi'+\varphi)=\mathfrak{r}\cos\varphi'-\mathfrak{r}\cos(\varphi'+\varphi) \quad (22)$$

und aus diesen beiden Gleichungen:

$$x=\mathfrak{r}\sin\varphi-\varrho\sin\varphi'\cos(\varphi'+\varphi) \quad =(\mathfrak{r}+\varrho)\sin\varphi-\varrho\cos\varphi'\sin(\varphi'+\varphi)$$
$$y=\mathfrak{r}\cos\varphi+\varrho\sin\varphi'\sin(\varphi'+\varphi)-\mathfrak{r}=(\mathfrak{r}+\varrho)\cos\varphi-\varrho\cos\varphi'\cos(\varphi'+\varphi)-\mathfrak{r}$$

als die Gleichungen der Enveloppe, die offenbar mit (20) identisch sind. — Man bemerkt, dass Gleichung (22) eine zu (21) senkrechte Grade darstellt und zwar ist dies eben die vom Berührungspunkte ausgehende Senkrechte, deren Fusspunkt unser erzeugender Punkt ist. — Wird der rollende Kreis vom doppelten Radius des Grundkreises, so wird unsere Curve zur bekannten Cardioide; in der That folgt für $\varrho=2\mathfrak{r}$ aus (20):

$$x=2\mathfrak{r}\sin\varphi-\mathfrak{r}\sin 2\varphi$$
$$y=2\mathfrak{r}\cos\varphi-\mathfrak{r}\cos 2\varphi-\mathfrak{r}$$

welches die bekannten Gleichungen einer zwei gleichen Kreisen [r] angehörigen Cardioide sind.

Indes giebt es auch noch andere Fälle, in denen Curve (19) eine gewöhnliche epicycloidische ist, wie die nachstehende allgemeinere Betrachtung zeigt. Man kann jene Gleichungen schreiben:

$$\left.\begin{aligned} x&=(\mathfrak{r}+\varrho)\sin\varphi-\frac{\varrho}{2}\sin(\varphi'+\varphi+m\varphi')-\frac{\varrho}{2}\sin(\varphi'+\varphi-m\varphi') \\ y&=(\mathfrak{r}+\varrho)\cos\varphi-\frac{\varrho}{2}\cos(\varphi'+\varphi+m\varphi')-\frac{\varrho}{2}\cos(\varphi'+\varphi-m\varphi')-\mathfrak{r} \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

und erkennt, dass diese Gleichungen eine gemeine epicycloidische Curve repräsentieren, wenn $\mathfrak{r}$, $\varrho$ und $m$ solche Werte annehmen, dass die von $\varphi$ abhängigen drei Glieder in den Ausdrücken für $x$ und $y$ sich auf zwei Glieder reducieren. Dies tritt offenbar ein in den folgenden drei Fällen:

1) wenn $\varphi'+\varphi+m\varphi'=\varphi'+\varphi-m\varphi'$, d. h. wenn $m=0$ wie bereits oben bemerkt,

2) wenn entweder: $\varphi'+\varphi+m\varphi'=\varphi$ oder: $\varphi'+\varphi-m\varphi'=\varphi$ d. h. für $m=\pm 1$, wie ebenfalls schon gezeigt wurde,

3) wenn $\varphi'+\varphi+m\varphi'$ oder $\varphi'+\varphi-m\varphi'=0$ d. h. wenn

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{r}+\varrho+m\mathfrak{r}=0 \text{ oder} \\ &\mathfrak{r}+\varrho-m\mathfrak{r}=0 \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Für jede der Relationen (24) nehmen dann Gleichungen (23) resp. (19) die Form an:

$$\left.\begin{aligned} x &= (\mathfrak{r}+\varrho)\sin\varphi - \frac{\varrho}{2}\sin\frac{2(\mathfrak{r}+\varrho)}{\varrho}\varphi \\ y &= (\mathfrak{r}+\varrho)\cos\varphi - \frac{\varrho}{2}\cos\frac{2(\mathfrak{r}+\varrho)}{\varrho}\varphi - \left(\mathfrak{r}+\frac{\varrho}{2}\right) \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

oder auch:

$$\left.\begin{aligned} x &= \left(\mathfrak{r}+\frac{\varrho}{2}+\frac{\varrho}{2}\right)\sin\varphi - \frac{\varrho}{2}\sin\frac{\mathfrak{r}+\frac{\varrho}{2}+\frac{\varrho}{2}}{\frac{\varrho}{2}}\varphi \\ y &= \left(\mathfrak{r}+\frac{\varrho}{2}+\frac{\varrho}{2}\right)\cos\varphi - \frac{\varrho}{2}\cos\frac{\mathfrak{r}+\frac{\varrho}{2}+\frac{\varrho}{2}}{\frac{\varrho}{2}}\varphi - \left(\mathfrak{r}+\frac{\varrho}{2}\right) \end{aligned}\right\} \quad (25\alpha)$$

woraus deutlich erkannt wird, dass für solche Werte von $\mathfrak{r}$, $\varrho$ und $m$, für welche die eine oder andere der Relationen (24) erfüllt wird, die entstehende Curve eine gemeine Epicycloide wird, die auch entsteht, wenn Kreis $\left[\frac{\varrho}{2}\right]$ auf Kreis $\left[\mathfrak{r}+\frac{\varrho}{2}\right]$ hinrollt. Die Thatsache, dass die Ausdrücke in den beiden Bedingungsgleichungen (24) sich nur durch das Zeichen von $m$ unterscheiden und für jede derselben ein und dieselbe Curve resultiert, stimmt mit der bereits oben gemachten Bemerkung bezüglich gleicher aber entgegengesetzter Werte von $m$. Da sich aus jenen Gleichungen für ein bestimmtes $m$ nur das Verhältnis von $\mathfrak{r}$ und $\varrho$ ergiebt, so giebt es unendlich viele Kreispaare, die bei einer bestimmten Eigenbewegung des Punktes $P$ eine gewöhnliche Epicycloide liefern. — Schreibt man (24) in der einzigen Form:

$$\frac{\mathfrak{r}}{\varrho} = \frac{1}{\pm m - 1} \quad (24\alpha)$$

wobei das eine Zeichen für positive, das andere für die gleichen negativen $m$ Gültigkeit hat, so ersieht man, dass die Absolutwerte von $m$, durch welche Gleichung (24$\alpha$) erfüllt, d. h. $\frac{\mathfrak{r}}{\varrho}$ positiv wird, grösser als 1 sein müssen. Für absolute Werte von $m$ kleiner als 1 könnten die Gleichungen (24) resp. (24$\alpha$) nur dann bestehen, wenn entweder $\mathfrak{r}$ oder $\varrho$ negativ würde, die Kreise also auf derselben Seite der Abscissenaxe lägen und die Wälzung eine hypocycloidische wäre, ein Fall, auf den wir weiter unten zurückkommen werden. Wie man ferner erkennt, sind die Grenzfälle $m = 0$ und $m = 1$ in jenen Relationen (24) oder (24$\alpha$) nicht miteinbegriffen; dieselben bedürfen, wie geschehen, einer besondern Untersuchung, was auch darin seine Erklärung findet, dass bei $m = 0$ und $m = 1$ für alle nur möglichen Werte von $\mathfrak{r}$ und $\varrho$

gemeine Epicycloiden entstehen, das Verhältnis dieser Radien von $m$ also völlig unabhängig ist. — Sind von den Grössen $\mathfrak{r}$, $\varrho$ und $m$ zwei gegeben, so lässt sich die dritte nach (24) stets so bestimmen, dass die entstehende Curve eine Rollcurve gewöhnlicher Art wird. — Für $m = \pm 2$ z. B. muss $\mathfrak{r} = \varrho$ sein; alsdann lauten die Gleichungen der Curve:

$$x = 2\mathfrak{r}\sin\varphi - \tfrac{1}{2}\mathfrak{r}\sin 4\varphi$$
$$y = 2\mathfrak{r}\cos\varphi - \tfrac{1}{2}\mathfrak{r}\cos 4\varphi - \tfrac{3}{2}\mathfrak{r}$$

die dann offenbar den Kreisen $[\frac{3}{2}\mathfrak{r}]$ und $[\frac{1}{2}\mathfrak{r}]$ angehört.

Allen andern Werten der Grössen $\mathfrak{r}$, $\varrho$ und $m$ entsprechen in dem behandelten Falle Curven complicierterer Natur.

II. Es liege der Grundkreis mit dem rollenden auf derselben Seite der $x$-Axe; alsdann wird die Rollbewegung eine hypo- oder pericycloidische. Hierfür lautet die Gleichung des Grundkreises:

$$\xi^2 + (\mathfrak{y} - \mathfrak{r})^2 = \mathfrak{r}^2$$

die sich von (8) nur durch das Vorzeichen von $\mathfrak{r}$ unterscheidet und man gelangt einfach zu den für den vorliegenden Fall geltenden Gleichungen, wenn man in (19) sowohl $\mathfrak{r}$ als auch $\varphi$, da dieser Winkel alsdann im entgegengesetzten Sinne beschrieben wird, negativ nimmt. Man erhält so:

$$\left.\begin{aligned} x &= (\mathfrak{r} - \varrho)\sin\varphi - \varrho\cos m\varphi' \sin(\varphi' - \varphi) \\ y &= -(\mathfrak{r} - \varrho)\cos\varphi - \varrho\cos m\varphi' \cos(\varphi' - \varphi) + \mathfrak{r} \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

als Gleichung der entstehenden hypocycloidischen Rollcurve.

Für $m = 0$ gehen auch hier Gleichungen (26) in die der gewöhnlichen den Kreisen $[\mathfrak{r}]$ und $[\varrho]$ angehörigen Hypocycloide über.

Für $m = \pm 1$ ergiebt sich die der Gleichung (20) analoge Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} x &= (\mathfrak{r} - \tfrac{1}{2}\varrho)\sin\varphi - \tfrac{1}{2}\varrho\sin\frac{\mathfrak{r} - \frac{1}{2}\varrho}{\frac{1}{2}\varrho}\varphi \\ y &= -(\mathfrak{r} - \tfrac{1}{2}\varrho)\cos\varphi - \tfrac{1}{2}\varrho\cos\frac{\mathfrak{r} - \frac{1}{2}\varrho}{\frac{1}{2}\varrho}\varphi + \mathfrak{r} \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

die Curve ist mithin eine gewöhnliche Hypocycloide oder Pericycloide, je nachdem $\mathfrak{r} \gtrless \frac{1}{2}\varrho$, die also auch entsteht, wenn Kreis $[\frac{1}{2}\varrho]$ hypocycloidisch resp. pericycloidisch auf Kreis $[\mathfrak{r}]$ rollt. Die Pericycloide ist bekanntlich gleichzeitig wieder eine Epicycloide, die Kreis $[\mathfrak{r}]$ ebenfalls zum Grundkreis, dagegen Kreis $[\frac{1}{2}\varrho - \mathfrak{r}]$ zum rollenden hat. — Eine der auf S. 8 geführten analoge Betrachtung zeigt, dass auch diese Curve nichts anderes ist als die Enveloppe des Durchmessers, an welcher derselbe in jeder seiner Lagen eine Tangente ist.

Stellt man auch hier analog S. 9 die Betrachtung zur Untersuchung der Fälle, in welchen Gleichungen (26) eine gewöhnliche Hypo-

cycloide repräsentieren, allgemein an, indem man jenen Gleichungen die Form giebt:

$$\left.\begin{aligned} x &= (\mathfrak{r}-\varrho)\sin\varphi - \frac{\varrho}{2}\sin(\varphi'-\varphi+m\varphi') - \frac{\varrho}{2}\sin(\varphi'-\varphi-m\varphi') \\ y &= -(\mathfrak{r}-\varrho)\cos\varphi - \frac{\varrho}{2}\cos(\varphi'-\varphi+m\varphi') - \frac{\varrho}{2}\cos(\varphi'-\varphi-m\varphi') + \mathfrak{r} \end{aligned}\right\} \quad (26\alpha)$$

so ergeben sich ausser den Bedingungen $m = 0$ und $m = \pm 1$ auch hier noch die folgenden zu (24) analogen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{r} - \varrho - m\mathfrak{r} &= 0 \\ \mathfrak{r} - \varrho + m\mathfrak{r} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

wofür Gleichungen (26) in die folgenden den Gleichungen (25$\alpha$) entsprechenden übergehen:

$$\left.\begin{aligned} x &= \left(\mathfrak{r}-\frac{\varrho}{2}-\frac{\varrho}{2}\right)\sin\varphi - \frac{\varrho}{2}\sin\frac{\mathfrak{r}-\frac{\varrho}{2}-\frac{\varrho}{2}}{\frac{\varrho}{2}}\varphi \\ y &= -\left(\mathfrak{r}-\frac{\varrho}{2}-\frac{\varrho}{2}\right)\cos\varphi - \frac{\varrho}{2}\cos\frac{\mathfrak{r}-\frac{\varrho}{2}-\frac{\varrho}{2}}{\frac{\varrho}{2}}\varphi + \left(\mathfrak{r}-\frac{\varrho}{2}\right) \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

die offenbar einer Hypocycloide der Kreise $\left[\mathfrak{r}-\frac{\varrho}{2}\right]$ und $\left[\frac{\varrho}{2}\right]$ angehören.

Schreibt man Gleichungen (28) in der Form:

$$\frac{\mathfrak{r}}{\varrho} = \frac{1}{1 \mp m} \quad (28\alpha)$$

worin wiederum das eine Zeichen für positive, das andere für die gleichen negativen Gültigkeit hat, so erkennt man, dass diese Gleichung für alle Werte von $m$ zwischen $+\infty$ und $-\infty$, mit Ausschluss der besonders zu untersuchenden Fälle für $m = 0$ und $m = \pm 1$, erfüllt wird. Die nähere Betrachtung ergiebt Folgendes. Der Ausdruck $\frac{1}{1 \mp m}$ wird für Werte von $m$, die absolut genommen zwischen den Grenzen 0 und 1 liegen, in jedem Falle positiv, mag man für positive $m$ das obere, für negative das untere Zeichen gelten lassen oder umgekehrt, jedoch ist dabei ein wesentlicher Unterschied zu beachten. Im erstern Falle ist stets, wenn $m'$ den zwischen 0 und 1 liegenden absoluten Wert von $m$ bedeutet:

$$\frac{\mathfrak{r}}{\varrho} = \frac{1}{1 - m'} \quad (28\beta)$$

d. h. $\mathfrak{r} > \varrho$ und somit $\mathfrak{r} - \varrho = \mathfrak{r} - \frac{\varrho}{2} - \frac{\varrho}{2}$ positiv und die Curve ist dann eine gemeine Hypocycloide, zugehörig zwei Kreisen mit den resp. Radien $\mathfrak{r} - \frac{\varrho}{2} = \frac{1+m'}{1-m'} \cdot \frac{\varrho}{2}$ und $\frac{\varrho}{2}$. Im andern Falle wird:

$$\frac{\mathfrak{r}}{\varrho} = \frac{1}{1+m'} \qquad (28\gamma)$$

d. h. $\mathfrak{r} < \varrho$ und somit $\mathfrak{r} - \varrho = \mathfrak{r} - \frac{\varrho}{2} - \frac{\varrho}{2}$ negativ; die Curve ist eine gemeine Pericycloide, welcher zwei Kreise mit den Radien $\mathfrak{r} - \frac{\varrho}{2} = \frac{1-m'}{1+m'} \cdot \frac{\varrho}{2}$ und $\frac{\varrho}{2}$ entsprechen, die auch gleichzeitig Epicycloide desselben Kreises $\left[\frac{1-m'}{1+m'}\,\frac{\varrho}{2}\right]$ als Grundkreises und eines Kreises $\left[\frac{\varrho}{2} - \frac{1-m'}{1+m'}\,\frac{\varrho}{2}\right] = \left[\frac{m'}{1+m'}\,\varrho\right]$ als rollenden Kreises ist (vgl. S. 11).

Bei Werten von $m$ grösser als 1 kann in $(28\alpha)$ das obere Zeichen nur den negativen, das untere den gleichen positiven entsprechen. Hierdurch wird $\mathfrak{r} - \frac{\varrho}{2} = \frac{1-m'}{1+m'} \cdot \frac{\varrho}{2}$, unter $m'$ wieder den betreffenden absoluten Wert verstanden, eine wesentlich negative Grösse. Setzt man dieselbe $= -\mathfrak{r}'$, sowie $\frac{\varrho}{2} = \varrho'$ so geht (29) über in:

$$\left.\begin{aligned} x &= -(\mathfrak{r}' + \varrho')\sin\varphi + \varrho' \sin\frac{\mathfrak{r}'+\varrho'}{\varrho'}\varphi \\ y &= \quad (\mathfrak{r}' + \varrho')\cos\varphi - \varrho' \cos\frac{\mathfrak{r}'+\varrho'}{\varrho'}\varphi - \mathfrak{r}' \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

welches offenbar die Gleichungen einer Epicycloide sind; unsere pericycloidische Curve ist also gleichzeitig eine gewöhnliche Epicycloide, die entsteht, wenn Kreis $[\varrho'] = \left[\frac{\varrho}{2}\right]$ auf einem zweiten unterhalb der Abscissenaxe liegenden Kreis $[\mathfrak{r}'] = \left[-\frac{1-m'}{1+m'}\,\frac{\varrho}{2}\right]$ epicycloidisch so rollt, dass $\varphi$ im entgegengesetzten Sinne beschrieben wird. — Sollte bei $m > 1$ in $(28\alpha)$ das obere Zeichen für positive Werte und entsprechend des untern für negative gelten, so könnte jene Relation nur bestehen, wenn $\mathfrak{r}$ oder $\varrho$ negativ genommen würde, d. h. die Wälzung ursprünglich eine epicycloidische wäre, was mit unserer früheren Betrachtung übereinstimmt.

Betrachtung einiger spezieller Fälle:

1) Für $m = \pm 1$ und $\varrho = \frac{1}{2}\mathfrak{r}$ gehen (26) oder (26$\alpha$) über in:

$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{3}{4}\mathfrak{r}\sin\varphi - \tfrac{1}{4}\mathfrak{r}\sin 3\varphi = \mathfrak{r}\sin^3\varphi \\ y &= -\tfrac{3}{4}\mathfrak{r}\cos\varphi - \tfrac{1}{4}\mathfrak{r}\cos 3\varphi = -\mathfrak{r}\cos^3\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

oder nach Elimination von $\varphi$:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \mathfrak{r}^{\frac{2}{3}} \qquad (31\alpha)$$

Die Curve ist also die bekannte Sterncurve (Astroide), die auch beschrieben wird von einem festen Peripheriepunkt eines Kreises $[\varrho'] = [\frac{1}{4}\mathfrak{r}]$, welcher auf Kreis $[\mathfrak{r}]$ hypocycloidisch rollt. Diese Curve ist auch bekanntlich die Enveloppe einer mit ihren Endpunkten auf den Schenkeln eines rechten Winkels schleifenden Graden von constanter Länge, und dies ist thatsächlich hier der Fall, indem ja die beiden Endpunkte des Durchmessers des rollenden Kreises $\left[\frac{\mathfrak{r}}{2}\right]$ zwei auf einander senkrechte Durchmesser des Grundkreises beschreiben und die Curve für $m = \pm 1$, wie wir oben sahen, wirklich eine Einhüllende ist.

2) Für $m = \pm 1$ und $\varrho = 2\mathfrak{r}$ liefert (26) oder (26$\alpha$):

$$x = 0$$
$$y = 0.$$

Die Curve reduciert sich also in diesem Falle auf einen Punkt und zwar auf den Coordinatenanfang selbst, d. h. Punkt $P$ bleibt in diesem Punkte in Ruhe oder der Durchmesser des rollenden Kreises geht stets durch den Coordinatenanfang und dieser liegt immer senkrecht unter dem jedesmaligen Berührungspunkt. Man überzeugt sich hiervon leicht durch die Anschauung. — Dies bildet den Grenzfall zwischen den bei Relation (28$\gamma$) betrachteten beiden Fällen, in denen zwei Gruppen von Epicycloiden entstehen, die sich zu einander in entgegengesetzter Lage befinden.

3) Unter denjenigen speziellen Fällen, in welchen die Curve keine gemeine cycloidische Rollcurve wird, heben wir nur den hervor, wo $m = 2$ und $\varrho = 2\mathfrak{r}$. Hierfür nehmen Gleichungen (26) die Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} x &= -2\mathfrak{r}\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\varphi\right) \\ y &= \quad 2\mathfrak{r}\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\varphi\right) \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

woraus auch nach Elimination von $\varphi$ als Parallel-Coordinaten-Gleichung entsteht:

$$(x^2 + y^2 - 2\mathfrak{r}y)^2 (x^2 + y^2) = 4\mathfrak{r}^2 (x^2 - y^2)^2 \qquad (33)$$

Endlich ergiebt sich auch sowohl aus (32) wie aus (33) leicht folgende einfache Polargleichung für die Curve:

$$r = 2\mathfrak{r}(\cos\vartheta \mp \cos 2\vartheta) \tag{34}$$

wenn Polarwinkel $\vartheta$ von der positiven Ordinatenaxe aus nach rechts gezählt wird.

Die Diskussion jener Gleichungen ergiebt, dass die Curve aus drei Blättern besteht, die sich teilweise decken (s. Fig. 2). Es mag nur kurz bemerkt werden, dass die Curve durch (34) auch schon bei Beachtung blos eines Zeichens repräsentiert wird, wenn dabei negative Werte von $r$ in entgegengesetztem Sinne gerechnet werden. Fig. 2.

Bedeutet $\tau$ den von der Tangente mit der $x$-Axe gebildeten Winkel, so hat man, wenn man in (34) nur das obere (negative) Zeichen beachtet:

$$\operatorname{cotg}(\tau - \vartheta) = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\vartheta} = \frac{\sin\vartheta - 2\sin 2\vartheta}{\cos\vartheta - \cos 2\vartheta} \tag{35}$$

für den von der Tangente mit dem Radius-Vector eingeschlossenen Winkel $\tau - \vartheta$. Dieser Winkel wird gleich Null, d. h. die Tangente fällt mit dem Radius-Vector zusammen für $\operatorname{cotg}(\tau - \vartheta) = \infty$, d. h. für $\cos\vartheta - \cos 2\vartheta = 0$. Dies findet statt, wenn $\cos\vartheta = +1$ oder $= -\frac{1}{2}$ ist oder für $\vartheta = 0,\ 2\pi,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$, nämlich in Punkt $O$, welcher zugleich Doppelpunkt und Spitze ist, da die Curve, wie man sich leicht überzeugt, in der Reihenfolge $O\,A\,B\,O\,A'\,C\,A\,O\,B'\,A'\,O$ in stetigem Zuge verläuft. In jenem Punkt $O$ besitzt die Curve also vier Tangenten, von denen jedoch zwei mit der Ordinatenaxe zusammenfallen, während die beiden andern zu derselben und zu einander unter Winkeln von 60° geneigt sind.

Die Curve schneidet die $x$-Axe in zwei Punkten $B$ und $B'$, deren $x = \pm 2\mathfrak{r}$, sowie die Ordinatenaxe in einem Punkte $C$, dessen $y = 4\mathfrak{r}$ ist. Die Neigung der Tangente zur $x$-Axe in den beiden erstern Punkten beträgt resp. $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{3\pi}{4}$, während dieselbe in $C$ zur $x$-Axe parallel geht und zugleich senkrecht ist zum Radius-Vector. Solcher Punkte, in denen das Letztere der Fall ist, existieren noch zwei, deren $\vartheta$ sich aus der aus (35) hervorgehenden Bedingung $\sin\vartheta - 2\sin 2\vartheta = 0$ ergiebt; man findet $\vartheta = \arccos\frac{1}{4}$ und $2\pi - \arccos\frac{1}{4}$. — Für die Doppelpunkte $A$ und $A'$ ist, da $r$ hier in (34) eindeutig ausfallen muss und somit $\cos 2\vartheta = 0$ zu setzen ist,

$$\vartheta = \frac{\pi}{4} \text{ oder } \frac{3\pi}{4}$$

und daraus: $$r = \mathfrak{r}\sqrt{2}$$

d. i. $r$ gleich der Seite des in den Grundkreis eingeschriebenen Quadrats; wie weiterhin ersichtlich, liegen jene Punkte auf dem Grundkreis selbst. Wie man sich nach dem Vorhergehenden leicht überzeugt, gehen die zu den Punkten $B$ und $B'$ gehörigen Normalen durch $A$ resp. $A'$ und $O'$. $A$ und $A'$ liegen also mit $B$ und $O'$ resp. $B'$ und $O'$ in einer Graden und halbieren die betreffenden Verbindungslinien.

Die Coordinaten $x$ und $y$ der äussersten Punkte der Curve ergeben sich als die Maximal- resp. Minimalwerte von $x = r\cos\vartheta$ und $y = r\sin\vartheta$. Oder man benutzt Gleichung (35), indem man beachtet, dass, weil keine Unterbrechung der Stetigkeit vorhanden ist, in den äussersten Punkten die Tangente senkrecht resp. parallel zur $x$-Axe sein muss; man gewinnt dann das entsprechende $\vartheta$, wenn man in (35) $\tau$ sowohl $= \frac{\pi}{2}$ als auch $= 0$ setzt, aus den Relationen:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\sin\vartheta - 2\sin 2\vartheta}{\cos\vartheta - \cos 2\vartheta}$$

und

$$-\operatorname{cotg}\vartheta = \frac{\sin\vartheta - 2\sin 2\vartheta}{\cos\vartheta - \cos 2\vartheta}$$

Man findet aus der ersten dieser Gleichungen drei Werte von $\sin\vartheta$ nämlich: $1$, $\frac{-2+\sqrt{10}}{6}$, $\frac{-2-\sqrt{10}}{6}$, deren erster dem Anfangspunkte, deren zweiter den äussersten seitlichen Punkten der beiden Seitenblätter, deren dritter den äussersten seitlichen Punkten des Mittelblattes entspricht. Ferner folgt aus der zweiten jener Gleichungen $\cos\vartheta = 0$, $\sin\vartheta = \frac{1+\sqrt{7}}{6}$ und $\sin\vartheta = \frac{1-\sqrt{7}}{6}$; der ersten dieser Bedingungen entspricht wiederum der Anfangspunkt sowie der Punkt $C$, der zweiten die höchsten, der dritten die tiefsten Punkte der Seitenblätter.

Von den Werten von $r$ sind die bemerkenswert, die sich als Maximalwerte aus (34) ergeben; man findet nämlich, dass

1) bei $\vartheta = \frac{\pi}{2}$: $\quad r = OC = 4\mathfrak{r}$ wie zu erwarten,

2) bei $\vartheta = \arcsin\frac{1}{4}$: $r = \frac{3}{4}\mathfrak{r}$ als grösster Radius der Seitenblätter.

Es sind dies diejenigen Radius-Vectoren, in deren Endpunkten die Tangente senkrecht steht.

Die Werte von $\vartheta$, für welche $r = 2\mathfrak{r}$ wird, ergeben sich aus der Gleichung:

$$2\mathfrak{r} = 2\mathfrak{r}(\sin\vartheta \pm \cos 2\vartheta)$$

oder

$$1 = \sin\vartheta \pm \cos 2\vartheta.$$

Hieraus resultieren drei Werte von $\sin\vartheta$, für welche obige Forderung erfüllt wird, da der vierte, weil grösser als die Einheit, unmöglich ist. Die entsprechenden sechs Werte von $\vartheta$ sind: $\vartheta = 0$ und $\pi$, $\frac{\pi}{6}$ und $\frac{5\pi}{6}$, $-\vartheta$ und $\pi + \vartheta$, (wenn abgekürzt arc sin $\frac{1-\sqrt{17}}{4} = -\vartheta$, gesetzt wird). Wie leicht ersichtlich, fallen die zu $\frac{\pi}{6}$ und $\frac{5\pi}{6}$ gehörigen Radien-Vectoren mit den im Coordinatenanfang gezogenen Tangenten zusammen.

Nach Gleichungen (34) gehören zu jedem $\vartheta$ zwei Radien-Vectoren $r'$ und $r''$, die entweder zusammenfallen oder, und zwar zwischen den Grenzen $\vartheta = -\frac{\pi}{6}$ und $\vartheta = +\frac{\pi}{6}$, nach entgegengesetzter Richtung liegen (da der eine negativ ausfällt). Bezeichnet man die Grösse $2\mathfrak{r}\cos\vartheta$, als den zum Grundkreis gehörigen Radius-Vector, mit $r_0$, so folgt nach (34):

$$r' + r'' = 2\mathfrak{r}_0 \text{ oder:}$$

$$r' - r_0 = r_0 - r''. \qquad (36)$$

Hierin stellt offenbar $r_0 - r''$, so lange $r''$ positiv ist, also mit $r'$ zusammenfällt, die Differenz, im andern Falle jedoch die Summe der Strecken $r_0$ und $r''$ dar. Alsdann liest man aus dieser Beziehung (36) leicht die bemerkenswerte Eigenschaft der Curve, dass das Stück jeder durch den vielfachen Punkt derselben gehenden Graden, welches von den beiden mit der Curve gebildeten Schnittpunkten begrenzt ist, stets durch die Peripherie des Grundkreises halbiert wird; zieht man z. B. durch $O$ eine Grade, welche die Curve in den Punkten $R'$ und $R''$, den Grundkreis in $M$ schneidet, so ist hiernach: $R'M = R''M$.

Für den Krümmungshalbmesser $R$ ergiebt sich aus (34), wenn man blos das untere Zeichen berücksichtigt:

$$R = \frac{4\mathfrak{r}\sqrt{2}(1-\cos\vartheta)^{\frac{1}{2}}(1-2\cos\vartheta+4\cos^2\vartheta+6\cos^3\vartheta)^{\frac{3}{2}}}{7-2\cos\vartheta+10\cos^2\vartheta+12\cos^3\vartheta}.$$

Folgende spezielle Werte mögen als besonders bemerkenswert hervorgehoben werden:

1) für $\vartheta = 0$ oder $2\pi$ d. i. für Punkt $O$ als Spitze, ist: $R = 0$

2) „ $\vartheta = \frac{2\pi}{3}$ und $\frac{4\pi}{3}$ d. i. für Punkt $O$ als Doppelpunkt: $R = \frac{3}{2}\mathfrak{r}\sqrt{3}$

3) „ $\vartheta = \pi$ d. i. für Punkt $C$: $R = \frac{8}{7}\mathfrak{r}$

4) „ $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ d. i. für Punkt $B$ und $B'$: $R = \frac{4}{7}\mathfrak{r}\sqrt{2}$.

Für den Gesammtinhalt $F$ aller drei Blätter findet man:

$$F = 4\mathfrak{r}^2\pi = \varrho^2\pi.$$

Die ganze Curvenfläche ist also gleich dem vierfachen Inhalt des Grundkreises und gleich dem Inhalt des rollenden. Beschreibt man mithin über $OC$ als Durchmesser einen Kreis, der offenbar gleich dem rollenden ist, so ist jede der entstehenden halbmondförmigen Figuren gleich einem der Seitenblätter. Wie sich leicht zeigen lässt, ist bei ganzem $m$ der Flächeninhalt $F$ überhaupt von $m$ ganz unabhängig und für jeden Wert von $m$ constant $= 4\mathfrak{r}^2\pi$ oder $\varrho^2\pi$. Ist $m$ rational (echt oder unecht) gebrochen, z. B. $= \frac{z}{n}$, so ergiebt sich:

$$F = n \,.\, 4\mathfrak{r}^2\pi$$
$$= n \,.\, \varrho^2\pi.$$

Für das Bogendifferential liefert Gleichung (34):

$$ds = 2\mathfrak{r}\sqrt{2}\sqrt{(1-\cos\vartheta)(1-2\cos\vartheta+4\cos^2\vartheta+6\cos^3\vartheta)}\,d\vartheta.$$

Die Curve ist also nicht rektifikabel.

III. Es mag nun der Grundkreis in eine Grade übergehen. Die diesem Fall entsprechenden Gleichungen gehen leicht aus (19) hervor, wenn man darin $\mathfrak{r} = \infty$ setzt. Bemerkt man, dass wegen des unendlich klein werdenden $\varphi$ zu setzen ist:

$$\mathfrak{r}\sin\varphi = \mathfrak{r}\varphi = \varrho\varphi' \qquad \varrho\sin\varphi = 0$$
$$\mathfrak{r}\cos\varphi = \mathfrak{r}\cos 0 = \mathfrak{r} \qquad \varrho\cos\varphi = \varrho$$

so ergeben sich als schliessliche Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varrho\varphi' - \varrho\cos m\varphi'\sin\varphi' \\ y &= \varrho \quad - \varrho\cos m\varphi'\cos\varphi' \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

Für $m = 0$ erscheint, wie es sich wiederum von selbst versteht, die gemeine, dem Kreis $[\varrho]$ zugehörige Cycloide.

Für $m = 1$ entsteht eine ebensolche, die aber einem Kreise $\left[\frac{\varrho}{2}\right]$ zugehört und welche wieder die Enveloppe des Durchmessers ist. — Allen andern Werten von $m$ entsprechen Curven complicierterer Art.

IV. Endlich soll sich der Grundkreis auf einen Punkt reducieren. Alsdann dreht sich der bisher rollende Kreis um eine durch seine Peripherie gehende und auf der Kreisfläche senkrechte Axe, während auf der mit ihm verbundenen Graden, hier seinem Durchmesser, ein Punkt in einer bestimmten von der Lage des Kreises d. h. von dem durch jenen Durchmesser beschriebenen Drehwinkel abhängigen Weise sich bewegt. Für den vorliegenden speziellen Fall heisst das: Eine begrenzte Grade (der Kreisdurchmesser) dreht sich gleichmässig um einen ihrer Endpunkte, während ein Punkt auf derselben die Pendelbewegung vollzieht.

Die Gleichungen hierfür ergeben sich aus (19), wenn man dort $\mathfrak{r} = 0$ setzt. Dabei ist zu beachten, dass, wenn auf dem sich drehenden Kreise ein gleichmässig fortschreitender Punkt $P_1$ vorhanden sein soll, unter dem der erzeugende Punkt stets senkrecht liegt, $m\mathfrak{r}$ nicht verschwinden darf. Man hat zu diesem Zweck $m = \infty$ zu nehmen, wodurch $m\mathfrak{r} = \infty . 0$ = einer beliebigen Constanten wird, die $m' . \varrho$ sein mag, wobei $m'$ offenbar die Grösse der Pendelgeschwindigkeit angiebt. Daraus folgen, wenn man gleichzeitig die Accente weglässt, die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varrho \sin\varphi\,(1-\cos m\varphi) \\ y &= \varrho \cos\varphi\,(1-\cos m\varphi) \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

worin $\varphi$ jetzt der vom Durchmesser mit der positiven $y$-Axe gebildete Winkel ist, der in diesem Grenzfalle gleich dem ursprünglichen $\varphi$ wird, so dass dieses ungeändert bleibt; oder in Polarcoordinaten, der Polarwinkel $\vartheta$ von der positiven $y$-Axe aus gezählt:

$$r = \varrho\,(1 - \cos m\vartheta). \qquad (39)$$

Für $m = 1$ gehen Gleichungen (38) und (39) resp. über in:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varrho \sin\varphi - \tfrac{1}{2}\varrho \sin 2\varphi \\ y &= \varrho \cos\varphi - \tfrac{1}{2}\varrho \cos 2\varphi - \frac{\varrho}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (38\,\alpha)$$

und

$$r = \varrho\,(1 - \cos\vartheta) \qquad (39\,\alpha)$$

welches die bekannten Gleichungen einer Cardioide sind, die auch von zwei Kreisen mit Radius $\frac{1}{2}\varrho$ auf gewöhnliche Art erzeugt wird. — Man überzeugt sich leicht, dass der auf dem rotierenden Kreis unter der Bedingung $m = \pm 1$ fortschreitende Punkt $P_1$ einen unterhalb der Abscissenaxe liegenden und dieselbe im Coordinatenanfang berührenden Kreis vom Radius $\varrho$, der also dem rotierenden gleich ist, beschreibt, an welchem die jedesmalige Senkrechte $P_1 P$ eine Tangente ist, und ersieht hieraus, dass unsere Curve zugleich die Fusspunktcurve eben dieses Kreises ist für Punkt $O$ als Pol. In der That tritt ja auch die Cardioide

als spezieller Fall der Fusspunktcurven eines Kreises auf, wenn, wie das hier zutrifft, der Pol auf der Kreisperipherie selbst liegt.

Für andere, ganzzahlige Werte von $m$ setzt sich die entstehende Curve aus $m$ durch den Anfangspunkt gehenden Aesten zusammen, die sämmtlich einander berühren. Man hat nämlich für den von der Tangente mit dem Radius-Vector gebildeten Winkel $\tau - \vartheta$:

$$\operatorname{cotg}(\tau - \vartheta) = \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\vartheta} = \frac{m \sin m\vartheta}{1 - \cos m\vartheta} \tag{40}$$

und für $\vartheta = \frac{n}{m} \cdot 2\pi$, worin $n$ die Werte 0, 1, 2 ... $m$ annehmen kann, d. h. also für alle Werte von $\vartheta$, für welche $r = 0$ wird, die Curve mithin zum Anfangspunkt zurückkehrt, wird:

$$\operatorname{cotg}(\tau - \vartheta) = \frac{m \sin 2n\pi}{1 - \cos 2n\pi} = \frac{0}{0} = \infty \tag{40\alpha}$$

Für $\vartheta = \frac{n}{m} \cdot 2\pi \pm \delta$ folgt ferner:

$$\operatorname{cotg}(\tau - \vartheta) = \pm \frac{m \sin m\delta}{1 - \cos m\delta} \tag{40\beta}$$

Beziehung (40$\alpha$) zeigt, dass bei jedem ganzzahligen Wert von $n$ die Tangente mit dem entsprechenden Radius-Vector zusammenfällt und wie dieser den beiden hier zusammenstossenden Curvenzweigen gemeinsam ist, während aus (40$\beta$) hervorgeht, dass die beiden Aeste zu beiden Seiten dieser gemeinschaftlichen Tangente symmetrisch verlaufen.

Ist $m$ nicht ganz, aber rational, so schliesst erst nach einer gewissen Anzahl von ganzen Umdrehungen wieder ein Ast an den ersten an. Wenn z. B. $m = p + \frac{q}{r} = \frac{p \cdot r + q}{r}$, so wird die Curve nach $r$ Umdrehungen durch den $(pr + q)$ten Ast geschlossen.

Für irrationales $m$ wird die Curve nie zu einer geschlossenen.

Für solche Werte endlich von $m$, die kleiner als 1 sind, stellt (39) eine teils sich spiralig einschliessende, teils an bestimmten Punkten durchdringende Linie dar.

Für den Flächeninhalt $F$ findet man allgemein:

$$F = \tfrac{1}{2}\varrho^2\left(\tfrac{3}{2}\vartheta + \frac{2}{m}\sin m\vartheta - \frac{1}{4m}\sin 2m\vartheta\right).$$

Daraus folgt als Inhalt $f$ eines Blattes, wenn man das Integral von 0 bis $\frac{2\pi}{m}$ nimmt:

$$f = \frac{3}{2m} \cdot \varrho^2 \pi.$$

Ist $m$ eine ganze Zahl, so enthält ein vollständiger Blattcyclus $m$ Blätter, mithin dessen Inhalt:

$$F' = \tfrac{3}{2}\varrho^2\pi,$$

d. i. gleich dem $\frac{3}{2}$fachen des rotierenden Kreises.

Wenn $m = p + \frac{q}{r}$, so gehören zu einem vollständigen Cyclus $p \,.\, r + q$ Blätter bei $r$ Umdrehungen. Für den Gesammtinhalt $F''$ erhält man demnach:

$$F'' = (pr + q) \,.\, f = (pr + q) \cdot \frac{3}{2\frac{pr+q}{r}}\varrho^2\pi = r \,.\, \tfrac{3}{2}\varrho^2\pi.$$

Endlich wollen wir über den vorliegenden Fall noch folgende allgemeine Betrachtung anstellen. Es soll nämlich die Annahme gemacht werden, dass Punkt $P_1$ nicht auf dem rollenden Kreise selbst sich bewege, sondern auf einem zu demselben concentrischen mit der Gleichung:

$$\xi''^2 + (\eta'' - \varrho)^2 = \varrho''^2.$$

Alsdann ist in (13) nur zu setzen:

$$\xi_1 = \varrho'' \sin\frac{m\mathfrak{r}}{\varrho''}\varphi$$

$$\eta_1 = \varrho - \varrho'' \cos\frac{m\mathfrak{r}}{\varrho''}\varphi,$$

woraus wieder unter der Annahme $p = \infty$ und $q = 0$ nach (12) folgt:

$$\xi' = 0$$

$$\eta' = \eta_1 = \varrho - \varrho'' \cos\frac{m\mathfrak{r}}{\varrho''}\varphi.$$

Damit gehen Gleichungen (18) über in:

$$\left.\begin{aligned} x &= (\mathfrak{r} + \varrho)\sin\varphi - \varrho'' \cos\frac{m\mathfrak{r}}{\varrho''}\varphi \sin(\varphi' + \varphi) \\ y &= (\mathfrak{r} + \varrho)\cos\varphi - \varrho'' \cos\frac{m\mathfrak{r}}{\varrho''}\varphi \cos(\varphi' + \varphi) - \mathfrak{r}. \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

Reduciert sich jetzt der Grundkreis auf einen Punkt, so dreht sich Kreis $[\varrho'']$ um eben diesen Punkt, welcher im Abstande $\varrho$ von dessen Mittelpunkt liegt. Führt man die betreffenden Bedingungen ein, nämlich $\mathfrak{r} = 0$, $m \,.\, \mathfrak{r} = \infty \,.\, 0 = m' \,.\, \varrho''$, setzt $\varrho = \varepsilon \,.\, \varrho''$ und lässt schliesslich wieder der Einfachheit wegen die Accente fort, so entsteht:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varepsilon\varrho \sin\varphi - \varrho \cos m\varphi \sin\varphi \\ y &= \varepsilon\varrho \cos\varphi - \varrho \cos m\varphi \cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

Für $\varepsilon = 1$ liegt der Drehpunkt auf der Peripherie des rotierenden Kreises selbst und in der That werden dafür Gleichungen (42) mit denen (38) identisch.

Für $\varepsilon = 0$ rotiert der Kreis um seinen eigenen Mittelpunkt, die Grade also, auf welcher Punkt $P$ die Pendelbewegung vollzieht, dreht sich um die Ruhelage dieses Punktes.*) Die Gleichungen sind dann:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\varrho \cos m\varphi \sin \varphi \\ y &= -\varrho \cos m\varphi \cos \varphi \end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

woraus als einfache Polargleichung folgt, $\vartheta$ von der positiven $y$-Axe nach rechts gezählt:

$$r = -\varrho \cos m\vartheta \qquad (43\alpha)$$

Die rechte Seite hat das Zeichen —, weil für $\vartheta = \varphi = 0$ $r = y = -\varrho$ werden muss. — Bei $m$ gerade kann man auch setzen $+$, wie überhaupt bei jedem Werte von $m$, wenn die Curve nur an sich ohne Rücksicht auf ihre Lage durch die Gleichung dargestellt werden soll.

Hier mögen folgende Fälle besondere Beachtung finden:

1) $m = 0$. Die Curve ist ein mit dem rollenden identischer Kreis, wie sowohl aus den Gleichungen wie auch aus der Anschauung unmittelbar hervorgeht.

2) $m = \pm 1$. Die entstehende Curve ist wiederum ein Kreis vom Radius $\frac{\varrho}{2}$ unterhalb der $x$-Axe, dieselbe im Coordinatenanfang berührend.

3) $m = \pm 2$. Hierfür erhält man als Gleichung für die entstehende Curve:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\varrho \sin \varphi \cos 2\varphi \\ y &= -\varrho \cos \varphi \cos 2\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

oder, nach der einfachen Elimination von $\varphi$, als Parallelcoordinatengleichung:

$$(x^2 + y^2)^3 = \varrho^2 (x^2 - y^2)^2 \qquad (44\alpha)$$

oder endlich als sehr einfache Polargleichung:

$$r = -\varrho \cos 2\vartheta \qquad (44\beta)$$

Polarwinkel $\vartheta$ von der positiven $y$-Axe aus gezählt.

Fig. 3. Die Diskussion dieser Gleichungen zeigt, dass die Curve die in Fig. 3 angegebene Gestalt besitzt. Sie entsteht in einem continuierlichen Zuge in der Reihenfolge $ABOCDOEFOGHO$; die vier Blätter sind, wie man bei einer einfachen Betrachtung leicht erkennt, einander congruent und jedes liegt symmetrisch zu einer Längsaxe von der Grösse $\varrho$. — Gleichung $(44\beta)$ gilt sowohl für die Curve als Ganzes wie auch für jedes Blatt einzeln, indem der Polarwinkel von dessen Längsaxe aus ge-

*) Dieser spezielle Fall findet sich bereits ausführlicher behandelt von Dr. Auth in einer Programmabhandlung des Rinteler Gymnasiums von 1866. Von speziellen Fällen heben wir deshalb nur einige charakteristische zum Zweck der folgenden Betrachtungen hervor.

zählt und nur das positive Zeichen beibehalten wird. Wählt man nämlich irgend eine andere der Coordinatenaxen zur Polaraxe, so ändert sich bei Einsetzung des betreffenden Wertes von $\vartheta$ der absolute Wert von $r$ durchaus nicht. Ferner liefert Gleichung (44$\beta$) für gleiche entgegengesetzte Werte von $\vartheta$ gleiche Werte von $r$, woraus die symmetrische Lage jedes Blattes zu seiner Längsaxe folgt.

Als grösste Breite $2y_1$ findet man aus (44$\beta$), da $y_1 = r \sin \vartheta = \varrho \cos 2\vartheta \sin \vartheta$ ein Maximum werden muss:

$$2y_1 = \tfrac{4}{3}\sqrt{\tfrac{1}{6}} \cdot \varrho$$

und zwar bei $\vartheta = \arccos \sqrt{\tfrac{5}{6}}$ und $r = \tfrac{2}{3}\varrho$. Die zugehörige Abscisse ist:

$$x_1 = \tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{5}{6}} \cdot \varrho.$$

Als Flächeninhalt $f$ einer Blattfläche ergiebt sich:

$$f = \tfrac{1}{8}\varrho^2 \pi$$

mithin für das $F$ der ganzen Curve:

$$F = \tfrac{1}{2}\varrho^2 \pi$$

eine bemerkenswerte, sehr einfache Beziehung zwischen $F$ und dem Inhalt des rotierenden Kreises.

Der Wert für das Bogendifferential aus Gleichung (44$\beta$) nämlich:

$$ds = \sqrt{1 + 3\sin^2 2\vartheta}\, d\vartheta$$

zeigt, dass die Curve nicht rektifikabel ist.

Für den Krümmungshalbmesser $R$ erhält man:

$$R = \frac{(1 + 3\sin^2 2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}{5 + 3\sin^2 2\vartheta} \cdot \varrho.$$

Hieraus folgt:

1) für die Punkte $A, C, E, G$ oder $\vartheta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$: $R = \frac{1}{5}\varrho$

2) für den vierfachen Punkt $O$ oder $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ etc.: $R = \varrho$.

Ferner mag der Fall Beachtung finden, in welchem 4) $m = \pm 3$ ist. Hierfür folgt aus (43):

$$\left.\begin{aligned} x &= -\varrho \sin \varphi \cos 3\varphi \\ y &= -\varrho \cos \varphi \cos 3\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

oder nach Elimination von $\varphi$:

$$(x^2 + y^2)^2 - 3\varrho y (x^2 + y^2) + 4\varrho y^3 = 0 \qquad (45\alpha)$$

sowie als Polargleichung:

$$r = -\varrho \cos 3\vartheta. \qquad (45\beta)$$

Die Curve bildet ein Dreiblatt (Fig. 4) und besteht ebenso wie die vorige aus einer continuierlichen Linie $A\,B\,O\,C\,D\,O\,E\,F\,O\,A$. Die Blätter sind ebenfalls untereinander congruent und von symmetrischer

Fig. 4.

Gestalt in Bezug auf eine Längsaxe von der Grösse $\varrho$, sodass Gleichung $(45\beta)$ auch für jedes einzelne Blatt gelten kann, die Längsaxe als Polaraxe genommen und unter Beibehaltung blos des positiven Zeichens.

Man findet für die ganze Curvenfläche:

$$F = \tfrac{1}{4}\varrho^2\pi$$

sowie für den Krümmungsradius:

$$R = \frac{(1 + 8\sin^2 3\vartheta)^{\frac{3}{2}}}{5 + 4\sin^2 3\vartheta} \cdot \frac{\varrho}{2},$$

woraus wieder als spezielle Werte hervorgehoben werden mögen:

1) für die äussersten Punkte $A$, $C$, $E$ oder $\vartheta = 0$ etc.: $R = \frac{1}{10}\varrho$

2) für den dreifachen Punkt $O$ oder $\vartheta = \frac{\pi}{6}$ etc.: $R = \frac{3}{4}\varrho$.

Auch diese Curve ist, wie überhaupt die Curven dieser ganzen Gruppe, nicht rektificierbar.

Allgemein erkennt man leicht, dass, wenn $m$ ganz und gerade, die Curve $2m$ Blätter, wenn $m$ ganz und ungerade, genau $m$ Blätter besitzt, indem in diesem Falle bei einer vollständigen Umdrehung die Blätter der zweiten Hälfte mit denen der ersten coincidieren. Ferner zeigt eine einfache Betrachtung, dass im ersten Falle sämmtliche Blätter einander berühren, während im zweiten je zwei auf einander folgende Blätter um einen Winkel $= \frac{1}{m}\pi$ auseinander liegen. — Für den Flächeninhalt der allgemeinen Curve $r = \pm\varrho\cos m\vartheta$ findet man bei ganzem $m$:

$$F = \tfrac{1}{2}\varrho^2\int_0^{2\pi}\cos^2 m\vartheta\, d\vartheta = \tfrac{1}{2}\varrho^2\pi.$$

Derselbe ist somit von $m$ unabhängig und bei jedem Wert desselben constant gleich dem halben Inhalt des rotierenden Kreises. Zu beachten ist, dass die ungeraden $m$ nach Obigem die Grösse $\frac{1}{2}\varrho^2\pi$ den doppelten Inhalt der Curvenfläche bedeutet, derselbe für die einfache d. h. wirklich vorhandene demnach $= \frac{1}{4}\varrho^2\pi$ ist, wie auch oben für $m = 3$ gefunden.

Ist $m$ ein echter oder unechter rationaler Bruch z. B. $= \frac{z}{n}$, so ergiebt sich als Blattzahl $z$, wenn $z$ und $n$ ungerad, dagegen $2z$, wenn $z$ oder $n$ gerade sind. So entspricht z. B. dem Werte $m = \pm\frac{1}{2}$ eine aus
Fig. 5. zwei Aesten bestehende Curve von der Gestalt der Fig. 5, dem Werte
Fig. 6. $m = \pm\frac{1}{3}$ eine einästige von der Gestalt, wie sie Fig. 6 zeigt. Bezüglich der letztern verdient bemerkt zu werden, dass sie, wie nähere Betrachtung zeigt, auch die Fusspunktcurve eines Kreises ist, der zum Durch-

messer $AO = \varrho$ und Punkt $C$ ($CO = \frac{1}{2}\varrho$) zum Pol hat, die wiederum identisch ist mit einer speziellen Form der Pascal'schen Schnecke (vgl. S. 27). Desgleichen besteht auch hier eine bemerkenswerte einfache Beziehung zwischen Curven- und Kreisfläche; man findet nämlich für

den ersten Fall: $F = n \cdot \frac{1}{4}\varrho^2\pi$

für den zweiten: $F = n \cdot \frac{1}{2}\varrho^2\pi$

Beziehungen, die zu den obigen ganz analog sind.

Ferner dürfte die Bemerkung von Interesse sein, dass die durch die Gleichungen (43) dargestellten Curven auch noch in mehrfach anderer Weise erzeugt werden können; es soll dies durch eine kurze Betrachtung gezeigt werden.

Es sei der auf dem rollenden Kreise sich bewegende Punkt $P_1$ selbst der erzeugende; dann wird, wenn man für diesen Fall den Radius des rollenden Kreises mit $\varrho'$ bezeichnet, einfach (vgl. (13)):

$$\xi' = \xi_1 = \varrho' \sin \frac{m' \mathfrak{r}}{\varrho'} \varphi$$

$$\eta' = \eta_1 = \varrho' - \varrho' \cos \frac{m' \mathfrak{r}}{\varrho'} \varphi$$

und Gleichungen (18) resp. (19) erhalten die Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} x &= (\mathfrak{r} + \varrho') \sin \varphi - \varrho' \sin \left(\frac{\mathfrak{r}}{\varrho'} - \frac{m' \mathfrak{r}}{\varrho'} + 1\right) \varphi \\ y &= (\mathfrak{r} + \varrho') \cos \varphi - \varrho' \cos \left(\frac{\mathfrak{r}}{\varrho'} - \frac{m' \mathfrak{r}}{\varrho'} + 1\right) \varphi - \mathfrak{r} \end{aligned}\right\} \quad (46)$$

Nimmt man jetzt $\mathfrak{r}$ sowie auch $\varphi$ negativ, wodurch das Rollen ein hypocycloidisches wird, ferner $\mathfrak{r} = 2\varrho'$ und verlegt gleichzeitig den Coordinatenanfang in den Mittelpunkt des Grundkreises, wodurch im Ausdruck von $y$ das Glied $+\mathfrak{r}$ verschwindet, so entsteht:

$$\left.\begin{aligned} x &= \quad \varrho' \sin \varphi - \varrho' \sin (1 - 2m') \varphi = \quad 2\varrho' \sin m' \varphi \cos (1 - m') \varphi \\ y &= -\varrho' \cos \varphi - \varrho' \cos (1 - 2m') \varphi = -2\varrho' \cos m' \varphi \cos (1 - m') \varphi \end{aligned}\right\} \quad (47)$$

Hieraus ergiebt sich als einfache Polargleichung, Winkel $\vartheta$ von der positiven $y$-Axe nach rechts gezählt:

$$r = -2\varrho' \cos \frac{1 - m'}{m'} \vartheta. \quad (47\alpha)$$

Reduciert sich der Grundkreis auf einen Punkt, wird also $\mathfrak{r} = 0$ und $m'\mathfrak{r} = \infty \cdot 0 = m'' \cdot \varrho'$ gesetzt, so liefert (46):

$$\left.\begin{aligned} x &= \varrho' \sin \varphi - \varrho' \sin (1 - m'') \varphi = \quad 2\varrho' \sin \frac{m'' \varphi}{2} \cos \frac{(2 - m'') \varphi}{2} \\ y &= \varrho' \cos \varphi - \varrho' \cos (1 - m'') \varphi = -2\varrho' \sin \frac{m'' \varphi}{2} \sin \frac{(2 - m'') \varphi}{2} \end{aligned}\right\} \quad (48)$$

woraus wieder als Polargleichung folgt:

$$r = 2\varrho' \cos\frac{m''}{2-m''}\left(\frac{\pi}{m''} - \vartheta'\right)$$

Polarwinkel $\vartheta'$ wie oben von der positiven $y$-Axe nach rechts gerechnet, oder wenn man $\frac{\pi}{m''} - \vartheta' = \vartheta$ setzt, $\vartheta$ also von einer Axe zählt, die mit der ursprünglichen den Winkel $\frac{\pi}{m''}$ bildet, so kommt einfacher:

$$r = 2\varrho' \cos\frac{m''}{2-m''}\vartheta. \qquad (48\alpha)$$

Die Gleichungen $(43\alpha)$, $(47\alpha)$ und $(48\alpha)$ stimmen in der Form überein und repräsentieren eine und dieselbe Curve, wenn:

$$\varrho' = \tfrac{1}{2}\varrho \text{ und } m = \frac{1-m'}{m'} = \frac{m''}{2-m''}$$

und von den verschiedenen Zeichen der rechten Seiten, die nur die Lage der Curve bedingen, abgesehen wird.

Die folgende Tabelle enthält in übersichtlicher Zusammenstellung einige der einander entsprechenden Werte der Grössen $m$, $m'$ und $m''$:

Dem Werte $m = \pm 1$ entspricht $m' = \begin{cases} +\frac{1}{2} \\ \pm\infty \end{cases}$, $m'' = \begin{cases} +1 \\ \pm\infty \end{cases}$ $\frac{\pi}{m''} = \begin{cases} \pi \\ 0 \end{cases}$

„ „ $m = \pm 2$ „ $m' = \begin{cases} +\frac{1}{3} \\ -1 \end{cases}$, $m'' = \begin{cases} +\frac{4}{3} \\ +4 \end{cases}$ $\frac{\pi}{m''} = \begin{cases} \frac{3\pi}{4} \\ \frac{\pi}{4} \end{cases}$

„ „ $m = \pm 3$ „ $m' = \begin{cases} +\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$, $m'' = \begin{cases} +\frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ +\frac{6}{2} = 3 \end{cases}$ $\frac{\pi}{m''} = \begin{cases} \frac{2\pi}{3} \\ \frac{\pi}{3} \end{cases}$

„ „ $m = \pm 4$ „ $m' = \begin{cases} +\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$, $m'' = \begin{cases} +\frac{8}{5} \\ +\frac{8}{3} \end{cases}$ $\frac{\pi}{m''} = \begin{cases} \frac{5\pi}{8} \\ \frac{3\pi}{8} \end{cases}$

u. s. w.

„ „ $m = \pm \frac{1}{2}$ „ $m' = \begin{cases} +\frac{2}{3} \\ +2 \end{cases}$, $m'' = \begin{cases} +\frac{2}{3} \\ -2 \end{cases}$ $\frac{\pi}{m''} = \begin{cases} +\frac{3\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

„ „ $m = \pm \frac{1}{3}$ „ $m' = \begin{cases} +\frac{3}{4} \\ +\frac{3}{2} \end{cases}$, $m'' = \begin{cases} +\frac{1}{2} \\ -1 \end{cases}$ $\frac{\pi}{m''} = \begin{cases} +2\pi \\ -\pi \end{cases}$

u. s. w.

Hieraus geht hervor, dass jede der in (43$\alpha$) enthaltenen Curven im Allgemeinen auf fünf verschiedene Arten entstehen kann. So z. B. Curve (45) (vgl. Fig. 4) ausser auf die oben betrachtete Art, indem ein Kreis [$\varrho$] sich um seinen Mittelpunkt $O$ dreht und der erzeugende Punkt $P$ sich so bewegt, dass $A' P_1 = 3\, A' A$, noch in der Weise, dass innerhalb des ruhenden Kreises [$\varrho$] ein zweiter $\left[\frac{\varrho}{2}\right]$ (Kreis um $O'$) rollt, auf dessen Peripherie entweder ein Punkt $P_1'$ sich so bewegt, dass sein Weg stets $\frac{1}{4}$ des jedesmal abgewälzten Bogens beträgt ($A'' P_1' = \frac{1}{4} A'' P_1$), oder dass ein Punkt $P'$ (in der Figur zufällig mit $P$ zusammenfallend) in entgegengesetzter Richtung einen Weg gleich dem halben abgewälzten Bogen durchläuft ($A'' P' = -\frac{1}{2} A'' P_1$). Oder die Curve wird erzeugt, wenn ein Kreis $\left[\frac{\varrho}{2}\right]$ (Kreis um $O''$) um einen Peripheriepunkt rotiert, während auf seiner Peripherie der erzeugende Punkt sich mit einer Geschwindigkeit gleich der + 3-fachen ($P''$) oder gleich der + $\frac{3}{2}$-fachen ($P_1''$) Drehgeschwindigkeit des Kreises bewegt, d. h., wie allgemein bei positivem $m$, entgegengesetzt der Uhrzeigerrichtung, wenn die Drehung selbst in derselben stattfindet oder umgekehrt; also für $P''$ ist Centriwinkel $O O'' P'' = 3\varphi$, für $P_1''$ ist Winkel $O O'' P_1'' = \frac{3}{2}\varphi$. Durch Punkt $P_1''$ entsteht übrigens die Curve in der in der Figur gestrichelt angedeuteten Lage, wie es sein muss, da für diesen Fall $\frac{\pi}{m''} = \frac{2\pi}{3}$ (s. Tabelle), d. h. die Längsaxe des ersten Blattes mit der positiven $y$-Axe einen Winkel $= \frac{2\pi}{3}$ einschliesst. — Auch sieht man jetzt die S. 19 gemachte Bemerkung bestätigt, indem bei $m'' = +1$ die entstehende Curve nach (48$\alpha$) in der That ein Kreis ist.

Endlich erkennt man, dass die Gruppe der durch Gleichungen (42) dargestellten Curven die Pascal'sche Schnecke als speziellen Fall in sich begreift, nämlich wenn bei beliebigem Wert von $\varepsilon$ $m = 1$ wird; hieraus folgt:

$$r = \varrho\,(\varepsilon - \cos\vartheta) \qquad (49)$$

als die bekannte Polargleichung jener Curve. Der Kreis, auf welchen dieselbe bei der gewöhnlichen Entstehung bezogen wird, hat zum Radius $\frac{1}{2}\varrho$, also den halben Radius unseres rotierenden Kreises. Curve (49) ist aber auch zugleich Fusspunktcurve eines Kreises mit Radius $\varrho\varepsilon$, von dessen Mittelpunkt der Pol im Abstande $\varrho$ entfernt liegt. — Eine spezielle Form der Pascal'schen Schnecke, und zwar die in Fig. 6 dargestellte, entsteht auch, wie bereits oben S. 24 und 25

erwähnt, wenn bei $\varepsilon = 0$ $m = \pm\frac{1}{3}$ wird. Man erhält nämlich hierfür aus Gleichungen (42), wenn man $C$ als Anfang wählt:

$$x = -\frac{\varrho}{2}\left(\sin\frac{4\varphi}{3} + \sin\frac{2\varphi}{3}\right) = -\frac{\varrho}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\left(2\cos\frac{2\varphi}{3} + 1\right)$$

$$y = -\frac{\varrho}{2}\left(\cos\frac{4\varphi}{3} + \cos\frac{2\varphi}{3}\right) - \frac{\varrho}{2} = -\frac{\varrho}{2}\cos\frac{2\varphi}{3}\left(2\cos\frac{2\varphi}{3} + 1\right)$$

woraus sich als Polargleichung der Curve ergiebt:

$$r = \varrho\left(\tfrac{1}{2} + \cos\vartheta\right)$$

offenbar ein spezieller Fall von (49).

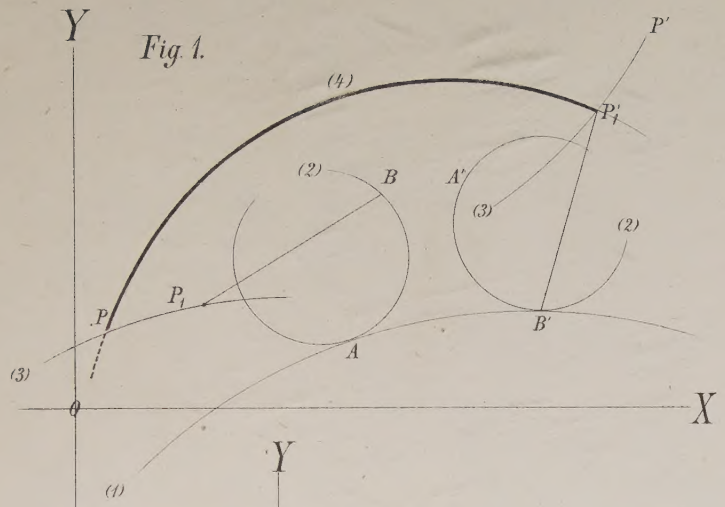


Fig. 1.

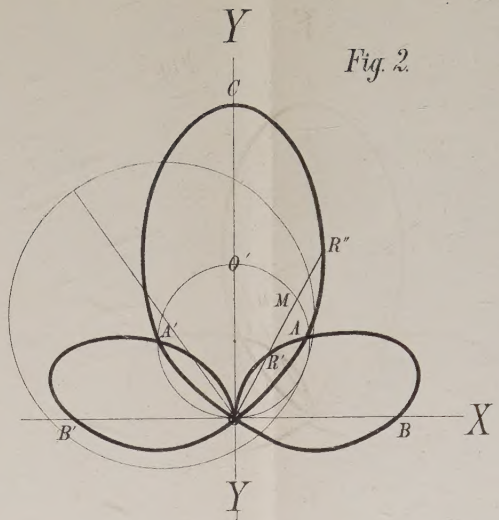


Fig. 2.

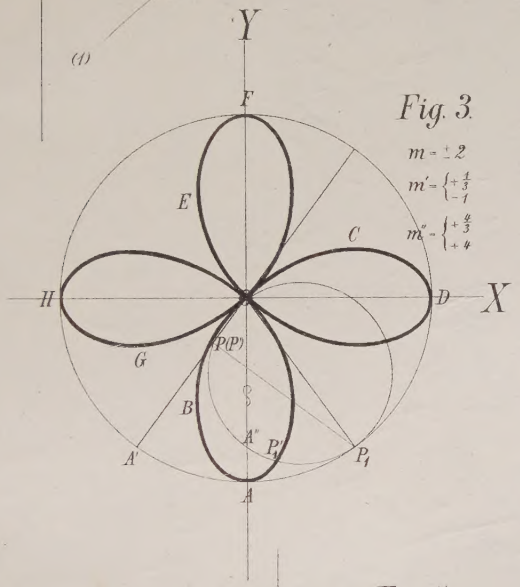


Fig. 3.

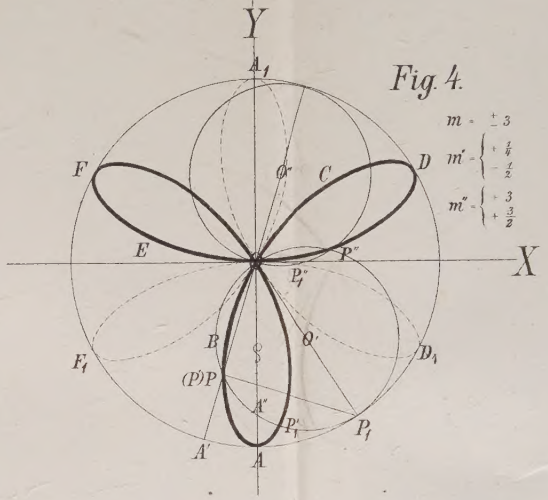


Fig. 4.

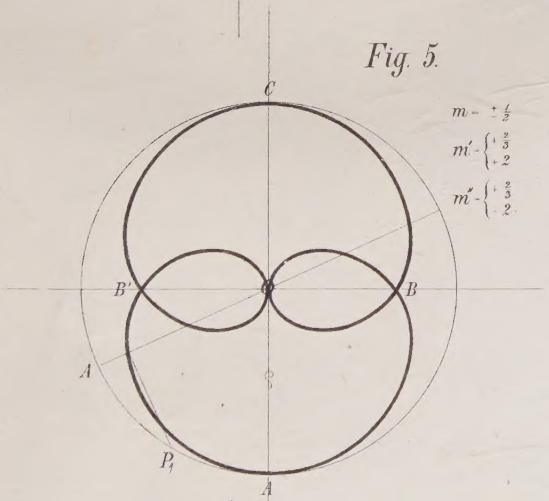


Fig. 5.

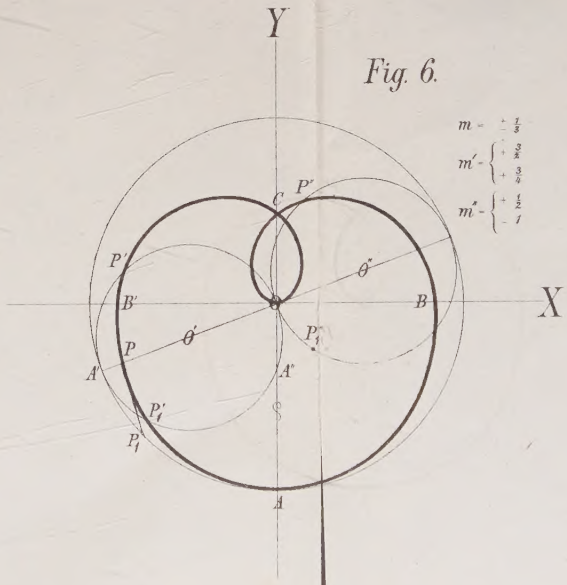


Fig. 6.